## Qu'est-ce qu'une manipulation ?

*Selon les documents d'accompagnement*

« Le travail mathématique est évidemment un travail de l'esprit. Mais celui-ci, en particulier à l'école élémentaire, s'exerce souvent à partir de questions posées sur des objets ou sur des expériences. Le matériel présent dans la classe doit donc être riche, varié et mis à disposition des élèves : cubes, jetons, bouliers, compteurs, instruments de géométrie et de mesure, jeux, etc.

Il faut cependant se convaincre que ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère. Il convient ainsi de bien distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches d'anticipation qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite vérifier la validité en revenant à l'expérience. C'est dans ce dernier cas que l'élève fait des mathématiques. Un exemple très simple permet de comprendre cette distinction. Au début du cycle 2, lorsque l'enseignant place sur la table 5 cubes rouges et 3 cubes bleus et demande aux élèves combien il y a de cubes sur la table, il provoque une activité de simple dénombrement, suffisante pour donner la réponse. Lorsqu'il place successivement les 5 cubes rouges et les 3 cubes bleus dans une boîte opaque et, après avoir fermé la boîte, pose la même question aux élèves, il oblige l'élève à trouver un moyen pour construire la réponse. Le dénombrement effectif des cubes dans la boîte ne servira pas alors à lire la réponse, mais à vérifier si la réponse construite est correcte ou non. C'est dans des activités de ce type que les élèves peuvent commencer à percevoir la puissance de leurs connaissances mathématiques, même si celles-ci sont encore modestes. »

(documents d'application - cycle 2 - 2003)

*Selon d'autres auteurs*

- « Il est très facile de repérer la différence entre le "tripotage", où les gestes sont fortuits et l'esprit de l'enfant ailleurs, et la manipulation, qui est une activité des mains guidées par un raisonnement, une pensée qui organise l'action. Avec un peu de pratique, on peut même souvent déterminer le raisonnement en observant la manipulation. »

(Catherine Berdonneau ; *Mathématiques actives pour les tout-petits* ; Hachette)

- « on a fini par comprendre qu'une école active n'est pas nécessairement une école de travaux manuels et que si, à certains niveaux, l'activité de l'enfant suppose une manipulation d'objets et même un certain nombre de tâtonnements matériels, dans la mesure par exemple où les notions logico-mathématiques élémentaires sont tirées, non pas de ces objets, mais des actions du sujet et de leurs coordinations, à d'autres niveaux l'activité la plus authentique de recherche peut se déployer au plan de la réflexion, de l'abstraction la plus poussée et de manipulations verbales (pourvu qu'elles soient spontanées et non pas imposées au risque de demeurer partiellement incomprises). »

(J. Piaget : *psychologie et pédagogie ; Denoël ; 1969*)

## Quelles manipulations au cycle 1 ?

En maternelle, les problèmes posés (tris, classements, comparaisons, jeux, etc.) portent sur des objets. Grâce à leurs premières manipulations, les enfants apprennent progressivement à anticiper les résultats de leur action. Dans *découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et la moyenne section*, Dominique Valentin ajoute : « il nous semble important de préciser cependant que les actions ne se réduisent pas à des manipulations : elles doivent également être mentales, même si, dans ce cas, elles restent souvent privées, difficiles à exprimer et à contrôler. »

*Un exemple de manipulation simple en PS*

Une très nombreuse collection de bouchons variés est placée dans une caisse. Il faut en extraire tous les verts. Il faudra **vérifier** qu'aucun vert n'est resté dans la caisse.

*Un exemple plus complexe : mettre le couvert.*

Les enfants doivent aller chercher, en une fois, juste ce qu'il faut de fourchettes, pas une de plus, pas une de moins pour achever de mettre le couvert**. Plusieurs procédures sont possibles**, toutes nécessitent une **anticipation** : correspondance terme à terme avec les doigts, comptage à l'aide des prénoms des convives, comptage à l'aide de la suite conventionnelle des mots-nombres, etc. La **vérification** est immédiate.

## Quelles manipulations au cycle 2 ?

Les manipulations restent indispensables. Elles portent progressivement sur des objets symboliques.

*Exemple simple : dénombrement*

Il s'agit de dénombrer une très grande collection de jetons. Plusieurs procédures sont possibles mais l'une d'entre elles est plus efficace : fabriquer des paquets de dix ou de cent jetons puis écrire le nombre total à partir des différents groupements.

*Un exemple plus complexe, sur des nombres :*

Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme est 57.

## Les manipulations sont-elles encore nécessaires au cycle 3 ?

Au cycle 3, les élèves ne sont pas trop grands pour résoudre des problèmes sur du matériel.

Comparer des surfaces variées selon leur aire, décrire des solides pour les construire, deviner le nombre de grains dans un kilo de riz, comparer le périmètre de plusieurs surfaces, toutes ces situations nécessitent une recherche sur du matériel.

D'autres manipulations peuvent porter sur des nombres : le compte est bon, le jeu du portrait, par exemple, ou sur des objets géométriques : construire une figure répondant à des conditions données à l'avance, par exemple.

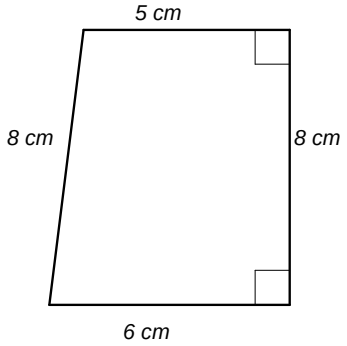
Dans tous les cas, il s'agit de réfléchir, anticiper, chercher, vérifier, etc.

## Les manipulations sont-elles semblables dans les domaines numériques et géométriques ?

Construire une image à partir d'un puzzle au cycle 1 ou chercher des nombres qui répondent à des conditions données peuvent donner lieu à d'authentiques manipulations : les élèves doivent anticiper, faire des essais, les tester sur les pièces du puzzle ou sur les nombres, corriger, etc.
Remarque anecdotique : la manipulation en géométrie peut conduire quelquefois à des objets curieux, mathématiquement impossibles mais constructibles en raison de l'imprécision des instruments.

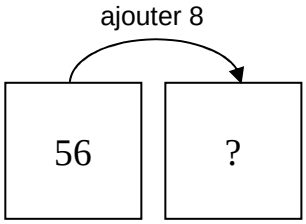
> *J'imagine un quadrilatère :*
> *Un de ses côtés mesure 5 cm.*
> *Deux de ses côtés mesurent 8 cm.*
> *Il a deux angles droits.*
> *Construis deux quadrilatères qui conviennent.*

Dans l'exemple ci-dessous, les élèves trouvent souvent le rectangle de longueur 8 cm et de largeur 5 cm. Certains proposent aussi ce trapèze impossible :




## Pourquoi les élèves réussissent-ils la manipulation mais pas le même exercice sur fiche ?

Un problème n'est pas toujours résolu de la même façon sur du matériel et sur une fiche. Par exemple, comparer deux collections d'objets déplaçables à l'aide d'une correspondance terme à terme, ce peut être superposer ou juxtaposer les objets. Comparer les mêmes collections représentées sur une fiche, c'est bien établir les correspondances mais c'est, en plus, mettre en œuvre une procédure d'ordre graphique pour en rendre compte : les liens se chevauchent, s'emmêlent ; il faut organiser judicieusement les tracés. C'est complexe.
Un élève peut savoir résoudre le premier problème mais pas le second.
De la même façon, les fiches proposées aux élèves comportent souvent des représentations graphiques qui peuvent faire obstacle. Ainsi, le schéma ci-contre ne rend pas compte de manière évidente de la transformation d'un état : pourquoi deux boîtes ? la flèche veut-elle dire que l'on enlève les 8 de la boîte où il y a 56 ?
La manipulation correspondante est pourtant évidente : il y a 56 jetons dans la boîte, on en ajoute 8, combien y en a-t-il maintenant ?




Les élèves peuvent comprendre la situation concrète et échouer lorsqu'il s'agit de remplacer le point d'interrogation par la réponse correcte.

## Ya-t-il un chemin à suivre pour passer de la manipulation à la représentation ?

Comme cela a été noté dans la question précédente, le passage de la manipulation concrète à la représentation n'est pas toujours évident. « *Il faut du temps pour intérioriser les actions en pensée car il est bien plus difficile de se représenter le déroulement d'une action que de se borner à une exécution matérielle : par exemple imprimer une rotation à un carré en se représentant tous les 90° la position des côtés diversement colorés est tout autre chose que de faire tourner le carré matériellement et de constater les effets.* » (Piaget, psychologie et pédagogie).
Les élèves peuvent, dans certains cas, avoir besoin d'une longue période de manipulation avant de pouvoir passer à la représentation. Des étapes intermédiaires peuvent alors être ménagées : des photos peuvent être prises pour autoriser ensuite un travail d'évocation utile.

## Comment peut-on manipuler avec une classe entière ?

Si le matériel s'y prête, il est intéressant de mener la séance en grand groupe. Par contre, lorsque le matériel n'est pas disponible en nombre suffisant, lorsque la manipulation doit être effectuée sous le contrôle de l'enseignant, le travail collectif n'est pas possible. Il convient alors de mettre en place un dispositif de type "atelier principal - ateliers satellites largement autonomes".

## La manipulation est-elle toujours nécessaire en début de séance au cycle 1 ?

En maternelle, les problèmes posés en début de séquence (au début d'une suite de séances) s'appuient sur du matériel. Les enfants doivent se constituer des images mentales et ne pas être éloignés du problème par l'intermédiaire de représentations graphiques. Par contre, dans le cours de la progression, certaines séances peuvent se centrer sur un problème dessiné. Par exemple, après des situations de partage effectuées sur du matériel, il est possible de commencer une séance sur un problème de partage d'objets représentés. C'est alors un problème nouveau (les procédures efficaces sur le matériel ne le sont plus ici) que l'on aborde avec des outils déjà mis en œuvre.

## Quelle place peut-on accorder aux manipulations d'objets matériels dans l'apprentissage ?

Examinons le rôle de la manipulation à différents moments d'une séance de résolution de problème.

**Au début, lors de la présentation du problème :**

En maternelle, les problèmes portent le plus souvent sur du matériel (tri, construction ou reproduction d'un agencement de solides, puzzle, par exemple.). Ils sont donc évidemment présentés avec le matériel lui-même. Dans ce cas, il est prudent de penser à une phase de découverte préalable lorsque le matériel est inconnu des élèves.

Il arrive aussi que le maître lui-même décide de présenter un problème en s'appuyant sur du matériel : greli-grelo, jeu du gobelet, etc. Cette présentation permet un énoncé clair du problème et surtout, après résolution, une validation finale essentielle dans l'apprentissage. Ce mode de présentation n'est évidemment pas nécessaire dans tous les cas : il est possible de demander à des élèves de CP de calculer 15 + 12 sans référence à des objets.

**Pendant la résolution :**

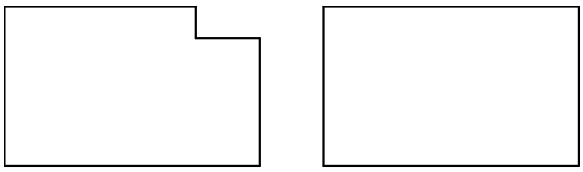
Le rôle des objets n'est pas le même dans tous les cas.

<u>a - le problème porte sur le matériel lui-même</u>

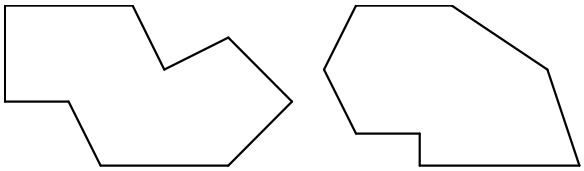
Les exemples sont nombreux : comparer des surfaces selon leur aire, comparer le périmètre de polygones variés, déterminer le nombre de cases d'une grande grille rectangulaire, etc.

L'efficacité de telles situations dépend d'un certain nombre de critères :

- la présence des objets est absolument nécessaire pour permettre une réflexion authentique. Ainsi, pour constater que 3 + 5 égale 8, à l'aide du comptage[1], l'appui sur des objets est suffisant mais pour obtenir ce résultat par le calcul, le matériel peut être un obstacle,
- les objets doivent être présents en nombre suffisant pour que le problème ait du sens pour tous les élèves,
- les élèves doivent pouvoir disposer du matériel suffisamment longtemps pour achever la résolution. Dans le cas contraire, les comparaisons entre les procédures sont peu probantes.
- les objets doivent être choisis de manière compatible avec les objectifs visés. Par exemple, des manipulations trop longues peuvent cacher les propriétés étudiées. Ainsi, pour comprendre que l'aire et le périmètre ne sont pas proportionnels, il est plus efficace de comparer ces deux figures :



que de comparer, à l'aide de découpages et de superpositions, ces mêmes grandeurs sur les figures suivantes :



D'une manière générale, les objets doivent permettre une réflexion authentique dont les résultats sont exploitables.

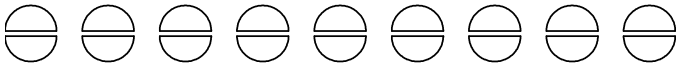
<u>b- le problème évoque des objets sans les mettre à disposition de tous</u>.

Prenons l'exemple d'un problème difficile pour le CE1 :

> *Aujourd'hui, pour le dessert, il y aura des tartelettes à la cantine ! Avec une tartelette, on peut servir deux élèves.*
> *Il y a 18 élèves.*
> *Combien de tartelettes faut-il préparer ?*
> (Cap Math CE1)

Ce problème est d'autant plus difficile que l'énoncé ne comporte qu'un seul nombre écrit en chiffres. Grossièrement, il peut être résolu à trois niveaux différents :

- *Niveau 1* : L'élève utilise du matériel ou dessine les tartelettes. La réponse est obtenue sans calcul. Le comptage



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,2 | 3,4 | 5,6 | 7,8 | 9,10 | 11,12 | 13,14 | 15,16 | 17,18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Il faut 9 tartelettes.

des demi-parts puis des tartelettes suffit :

- *Niveau 2* : L'élève met en œuvre une procédure numérique calquée sur la résolution pratique du niveau 1. Il n'a pas besoin de matériel. Au pire, il peut commencer une résolution dessinée mais n'a pas besoin d'achever son geste. Il se lance dans un double comptage : 2, 4, 6, 8, etc. pour les demi-parts et simultanément 1, 2, 3, 4, etc. pour les tartelettes (ou bien dans l'autre sens : 1, 2, 3, 4, etc. pour les tartelettes et 2, 4, 6, 8, etc. pour les élèves).
- *Niveau 3* : L'élève met en œuvre une procédure dite « experte ». Il se représente mentalement le partage achevé et pense d'emblée en doubles et moitiés : 9 et 9, 18. Il faut 9 tartelettes.

Il est clair que la résolution au niveau 1 est pauvre en apprentissages numériques. Elle n'est pourtant pas à rejeter complètement. En effet, cette première phase peut aider l'élève à comprendre le problème et lui servir d'appui pour mettre en œuvre ensuite une procédure n'utilisant pas de matériel. De plus, elle permet de valider les procédures utilisées par les autres élèves du groupe.

Toutefois, l'enseignant doit pouvoir faire évoluer les procédures du niveau 1 au niveau 2 puis du niveau 2 au niveau 3. Il dispose pour cela de ressources multiples :

- favoriser les progrès en calcul parallèlement à la résolution de problèmes : connaissance des tables, mise en place de procédures efficaces de calcul réfléchi, etc.,
- utiliser les moments de mise en commun pour établir les relations entre les procédures de différents niveaux,
- interrompre ostensiblement la manipulation ou la représentation dessinée avant l'achèvement et demander à l'élève de poursuivre la recherche sans cette aide,

[1] Compter : utiliser la comptine (un, deux, trois, etc.) pour dénombrer une collection : on trouve 3 + 4 en énonçant 1, 2, 3 puis 1, 2, 3, 4 et enfin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Calculer : s'appuyer sur des résultats connus (ou des représentations connues) pour obtenir la somme, la différence, le produit, le quotient, etc. de deux ou plusieurs nombres. Ainsi, une procédure de calcul réfléchi pour calculer 3 + 4, consiste à énoncer 3 et 3, 6 et encore 1, ça fait 7.

- augmenter la taille des nombres pour rendre trop longues les procédures de niveau 1,
- etc.

**A la fin de la résolution :**

Lorsque la présentation du problème s'appuie sur des objets, il est évidemment essentiel de valider les procédures à l'aide des objets eux-mêmes. Le langage accompagne ce moment privilégié : « Dylan a **compté** les objets et Jonathan a **calculé** 8 + 8 (il a deviné que 8 + 8 c'est 7 + 8 et encore 1). Jonathan va plus vite que Dylan pour trouver le résultat. »